UNIVERSITE DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR

DAEU B

FOR.CO

Service Commun de la Formation Continue

Session de **JUIN 2004**

Durée : **3 heures**

Matière : **OUTILS MATHEMATIQUES**

Exercice 1

1) On considère le polynôme P de la variable complexe z défini par :

$$P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$$

a) Calculer $P(4)$.

b) Déterminer deux réels a et b tels que :

$$P(z) = (z-4)(z^2 + az + b)$$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$P(z) = 0$$

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ tel que : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2cm.$

Soient A, B, C les points d'affixes respectives : $a = 4$; $b = 1 + i\sqrt{3}$; $c = 1 - i\sqrt{3}$.

a) Ecrire a, b, c sous forme trigonométrique et placer les points A, B, C sur la figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.

b) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

3) Soit K le point d'affixe $k = -\sqrt{3} + i$.

On appelle F l'image de K par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et G l'image de K par la translation de vecteur $\vec{OB}$.

a) Déterminer les affixes de F et de G .

b) Montrer que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.

4) Soit H le quatrième sommet du parallélogramme $COFH$.

a) Montrer que le quadrilatère $COFH$ est un carré.

b) Calculer l'affixe du point H.

c) Le triangle AGH est-il équilatéral?

Exercice 2

1) Une urne U_1 contient 2 jetons numérotés 1et 2.

Une urne U_2 contient 4 jetons numérotés 1,2,3 et 4.

On choisit au hasard une urne, puis un jeton dans cette urne (les choix sont supposés équiprobables).

a) Représenter la situation proposée à l'aide d'un arbre pondéré.

b) On note U_1 l'événement : "On a choisi l'urne U_1".

U_2 : "On a choisi l'urne U_2".

et A : "On a tiré un jeton portant le numéro 1".

Calculer les probabilités des événements : $U_1 \cap A$ et $U_2 \cap A$.

En déduire la probabilité de l'événement A.

c) On a tiré un jeton portant le numéro 1 . Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'urne U_1?

2) On rassemble maintenant les deux urnes en une seule, qui contient donc les 6 jetons précédents. On tire simultanément et au hasard 2 jetons de cette urne. Les tirages sont supposés équiprobables.

a) Calculer la probabilité de tirer 2 jetons identiques.

b) Soit S la variable aléatoire qui, à chaque tirage , associe la somme des numéros des 2 jetons tirés.

Déterminer la loi de probabilité de S.

c) Deux joueurs, Claude et Dominique, décident que si la somme des numéros tirés est impaire, Claude donne 10 euros à Dominique et que, dans le cas contraire, Claude reçoit λ euros de Dominique.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain algébrique de Claude.

Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de λ, puis déterminer λ pour que le jeu soit équitable (c'est à dire pour que $E(X) = 0$).

Exercice 3

Dans le plan, on considère un quadrilatère $ABCD$ quelconque

On note I et J les milieux respectifs de $[AC]$ et $[BD]$

Soient K et L les points définis par :

$$\vec{AK}= \frac{2}{3}\,\vec{AB} \text{ et } \vec{CL}= \frac{2}{3}\,\vec{CD}$$

On appelle M le milieu de $[LK]$

Le but de cet exercice est de montrer que M, I,et J sont alignés.

1) Faire une figure.

Montrer qu'il existe deux entiers naturels a et b tels que K et L soient les barycentres respectifs des systèmes $\{(A, a)\,;(B, b)\}$ et $\{(C, a)\,;(D, b)\}$

3) a) Justifier l'existence du barycentre G du système $\{(A, 1)\,;(B, 2)\,;(C, 1);(D, 2)\}$.

b) En utilisant l'associativité du barycentre, montrer que G appartient aux droites (IJ) et (LK).

4) Montrer que G et M sont confondus, puis que M, I, J sont alignés.

Préciser la position de M sur (IJ) .

5) On suppose dans cette question que I, B, et D ne sont pas alignés.

A l'aide de ce qui précède, montrer que M est le centre de gravité du triangle IBD.