UNIVERSITE DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR

DAEU B

FOR.CO

Service Commun de la Formation Continue

Session de **JUIN 2004**	Matière : **MATHEMATIQUES**
Durée : **3 heures**	

PROBLEME 1 : (8 points)

Partie A : Soit f la fonction définie sur $]o\,;+\infty[$ par $f(x) = 2x - 1 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}, \vec{j}\right)$ (Unité graphique : 2 cm).

1°) Calculer la limite de f en 0^+.

2°) Calculer la limite de f en $+\infty$. Démontrer que la droite (D) d'équations $y = 2x - 1$ est asymptote à (C).

Préciser la position relative de (C) et (D).

3°) Calculer la dérivée f' de f et dresser le tableau des variations de f.

4°) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α. Donner un encadrement à 10^{-1} près de α.

5°) Construire (C) et (D).

Partie B :

1°) Calculer à l'aide d'une intégration par parties $I = \displaystyle\int_1^3 \ln(x)\,dx$.

2°) Calculer à l'aide d'une intégration par parties $J = \displaystyle\int_1^3 \ln(x+1)\,dx$

$\left[\text{on pourra utiliser l'égalité } \dfrac{x}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1}\right]$

3°) Soit le domaine plan, ensemble des points $M(x,y)$ vérifiant $\begin{cases} 1 \leq x < 3 \\ f(x) \leq y \leq 2x - 1 \end{cases}$

Calculer son aire A en cm^2.

Partie C :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour les entiers strictement positifs par

$$u_n = 2n - 1 - f(n).$$

1°) On pose $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

Ecrire les valeurs de u_1, u_2, u_3, u_4. En déduire la valeur de S_n en fonction de n. Quelle est la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$?

2°) On pose $T_n = U_{n+1} + U_{n+2} + ... + U_{2n}$.

Calculer T_n en fonction de n, puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.

PROBLEME 2 : (12 points)

Il s'agit dans ce problème de donner une valeur approchée de la solution α de l'équation $f(x) = 0$ où la fonction f est définie sur
$]-\infty\,;+\infty[$par $f(x) = x - 1 + x\,e^{-x}$.

On notera (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i},\ \vec{j}\right)$ (Unité graphique ; 2 cm).

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.

On pose sur $]-\infty\,;+\infty[$, $g(x) = 1 + e^{-x} - xe^{-x}$

a) Calculer la dérivée g' de g, montrer que $g'(x)$ a le même signe que $(x-2)$.

b) Tracer le tableau des variations de g. Calculer $g(2)$.

c) En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Etude et courbe représentative de f.

a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote en $+\infty$ à (C). Préciser selon les valeurs de x, la position relative des courbes (C) et (D).

c) Calculer la dérivée f' de f.Déduire de la partie A que $f'(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$. Construire le tableau des variations de f.

d) La courbe (C) admet en un point A une tangente parallèle à la droite (D). Déterminer les coordonnées de A, en déduire l'équation de la tangente (T) en A à (C).

e) Construire la droite (D) à (T) et la courbe (C).

f) Dire pourquoi : l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α, avec $\alpha \in [0,1]$.

Partie C : Recherche d'une approximation à 10^{-6} près de α.

a) Démontrer que sur $\mathbb{R}$, résoudre $f(n) = 0$ équivaut à résoudre $x = \dfrac{e^x}{1+e^x}$. On posera, par la suite, $h(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$, ainsi α est l'unique solution de $h(x) = x$, c'est-à-dire $h(\alpha) = \alpha$.

b) On étudie $h(x)$ sur l'intervalle $I = [0,1]$.

1°) Calculer la dérivée h' de h. En déduire le tableau des variations de h sur $[0;1]$.

2°) Montrer que si $x \in [0,1]$ alors $h(x) \in [0,1]$.

3°) Montrer que $\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{-(1-e^x)^2}{4(1+e^x)^2}$. En déduire que $O \leq h'(x) \leq \dfrac{1}{4}$.

4°) Montrer que quel que soit $t \in [0,1]$, on a $|h(t) - h(\alpha)| \leq \dfrac{1}{4}\,|t - \alpha|$.

c) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$ pour tout entier naturel.

1°) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \in I$.

2°) Justifier, pour tout entier naturel n, l'inégalité : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}\,|u_u - \alpha|$. En déduire que l'on a : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

3°) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

4°) Déterminer le premier entier p_0 à partir duquel on est certain que u_{p_O} est une valeur approchée à 10^{-6} près de α.

A l'aide d'une calculatrice, donner la valeur de u_{p_O}.

BACCALAURÉAT, SÉRIE S
ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE ET ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ
FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES
(Version 2004)

I. COMBINATOIRE - DÉNOMBREMENTS

Soit E un ensemble de n éléments

Nombre de sous-ensembles de p éléments de E :

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\ \cdots\ (n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

où $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$; $0! = 1$

$$C_n^p = C_n^{n-p}\ ;\quad C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$$

II. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $P(\Omega) = 1$; $P(\varnothing) = 0$

Si $A_1, \cdots, A_n$ forment une partition de A, $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$

Probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé

$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$; $P(A|B)$ se note aussi $P_B(A)$

Cas où A et B sont indépendants : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Variable aléatoire

Fonction de répartition : $F(x) = P(X \leqslant x)$

Espérance mathématique : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

Variance : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (E(X))^2$

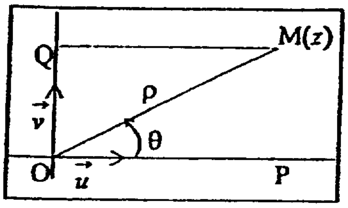
Ecart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

III. ALGÈBRE

A. *NOMBRES COMPLEXES*

Forme algébrique : $z = x + iy$

Forme trigonométrique : $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}, \rho > 0$



$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$

$\overline{OP} = x = \Re e(z) = \rho\cos\theta$

$\overline{OQ} = y = \Im m(z) = \rho\sin\theta$

$OM = \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Opérations algébriques

$$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$$

$$zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

Conjugué

$z = x + iy = \rho e^{i\theta}$; $\bar{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$

$x = \dfrac{1}{2}(z + \bar{z})$; $y = \dfrac{1}{2i}(z - \bar{z})$

$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$; $\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z}'$

$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\rho}e^{-i\theta}$$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$zz' = (\rho e^{i\theta})(\rho' e^{i\theta'}) = \rho\rho' e^{i(\theta + \theta')}$

$|zz'| = |z||z'|$

$\dfrac{z}{z'} = \dfrac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \dfrac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta - \theta')}$

$\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

$z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$

Inégalité triangulaire

$$\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

(valables sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$)

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

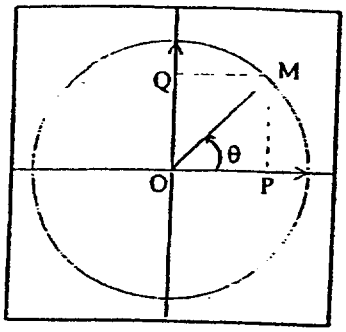
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + b^n$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$

C. TRIGONOMÉTRIE



$\overline{OP} = \cos\theta$

$\overline{OQ} = \sin\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Formules d'Euler

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \quad ; \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$$

Formules d'addition

$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$

$an(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}; \ \tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$

$os 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$in 2a = 2\sin a\cos a$

$os^2 a = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2a) \ ; \ \sin^2 a = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2a)$

ıleurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

mules de Moivre et applications

r tout entier naturel non nul n, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

encore $\quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

D. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.
L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double

$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

$z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}, \quad z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

E. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

(formules valables sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$)

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $\quad u_{n+1} = u_n + a$; $\quad u_n = u_0 + na$

$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $\quad u_{n+1} = bu_n$; $\quad u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $\quad S_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$

Si $b = 1$, $\quad S_n = n + 1$

IV. ANALYSE

A. *PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad (x > 0)$

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,

$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \ln y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x \ln a} \quad (a > 0)$

$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

$\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

$\ln a^x = x \ln a$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad (x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS ET DE SUITES*

1. Fonctions

Comportement à l'infini

$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

Comportement à l'origine de $\ln(1+x)$, e^x, $\sin x$, $(1+x)^\alpha$

$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

$\begin{cases} (1+h)^\alpha = 1 + \alpha h + h\varepsilon(h) \\ \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0 \end{cases} \quad (\alpha \neq 0)$

2. Suites

Si $\alpha > 0$, $\lim_{n \to +\infty} n^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim_{n \to +\infty} n^\alpha = 0$

Si $a > 1$, $\lim_{n \to +\infty} a^n = +\infty$; si $0 < a < 1$, $\lim_{n \to +\infty} a^n = 0$

Si $\alpha > 0$ et $a > 1$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty,+\infty[$
x	1	$]-\infty,+\infty[$
$x^n,\ n\in\mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\dfrac{1}{x^n},\ n\in\mathbb{N}^*$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u'+v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v+uv'$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$(v\circ u)' = (v'\circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL*

Formules fondamentales

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$

Si $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, alors $g'(x) = f(x)$

$f(x)-f(a) = \int_a^x f'(t)dt$

Formule de Chasles

$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

Linéarité

$\int_a^b (\alpha f(t)+\beta g(t))dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$

Positivité

Si $a\leqslant b$ et $f\geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0.$

Intégration d'une inégalité

Si $a\leqslant b$ et $f\leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$

Si $a\leqslant b$ et $m\leqslant f\leqslant M$,

alors $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a)$

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$: $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

Intégration par parties

$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES*

Équations	Solutions sur $]-\infty, +\infty[$
$y'-ay=0$	$f(x) = ke^{ax}$
$y''+\omega^2 y = 0$	$f(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$