



DAEU A

FOR.CO

Service Commun
de la Formation
Continue

Session de **JUIN 2004**

Matière : **MATHÉMATIQUES**

Durée : **3 heures**

Exercice 1

On donne les valeurs d'un indice boursier au premier de chaque mois entre janvier et septembre 2001.

Date	1/01	1/02	1 /03	1/04	1/05	1/06	1/07	1/08	1/09
Rang x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Indice y_i	7100	6900	6800	6600	6500	6350	6400	6250	6000

Les calculs seront effectués à l'aide de la calculatrice. Aucun détail de ces calculs n'est demandé.

1. Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points associé à la série statistique $(x_i; y_i)$.
On prendra 1 cm pour deux unités en abscisse et 1 cm pour 200 points d'indice en ordonnées, en commençant au point $(0 ; 5000)$.
2. La forme de nuage permet-elle d'envisager un ajustement affine ?
3. Donner une équation de la droite D d'ajustement affine de y en x (les coefficients étant arrondis à 0,01). Tracer D dans le repère.
4. On suppose que la tendance se poursuit.
 - a. En utilisant cet ajustement, donner une estimation à 10 points près de cet indice boursier au 1er janvier 2002.
 - b. Calculer le mois à partir duquel on peut estimer que cet indice sera inférieur à 5000.
Comment peut-on vérifier ce résultat graphiquement ?

Exercice 2

Une entreprise vend des calculatrices d'une certaine marque. Le service après-vente s'est aperçu qu'elles pouvaient présenter deux types de défaut, l'un lié au clavier et l'autre lié à l'affichage.

Des études statistiques ont permis à l'entreprise d'utiliser la modélisation suivante :

La probabilité pour une calculatrice tirée au hasard de présenter un défaut de clavier est égale à 0,04.

En présence du défaut de clavier, la probabilité que la calculatrice soit en panne d'affichage est de 0,03.

Alors qu'en l'absence de défaut de clavier, la probabilité de ne pas présenter de défaut d'affichage est de 0,94.

On note

- C l'événement : " la calculatrice présente un défaut de clavier ",
 A l'événement : " la calculatrice présente un défaut d'affichage ".

On notera $p(E)$ la probabilité de l'événement E . L'événement contraire de E sera noté \bar{E} .

$p_F(E)$ désignera la probabilité conditionnelle de l'événement E par rapport à l'événement F .

Dans cet exercice, les probabilités seront écrites sous forme de nombres décimaux arrondis au millième.

1.a. Préciser à l'aide de l'énoncé les probabilités suivantes :

$$p_{\bar{C}}(\bar{A}), p_C(A) \text{ et } p(C).$$

b. Construire un arbre pondéré décrivant cette situation.

2. On choisit une calculatrice de cette marque au hasard.

a. Calculer la probabilité pour que la calculatrice présente les deux défauts.

b. Calculer la probabilité pour que la calculatrice présente le défaut d'affichage mais pas le défaut de clavier.

c. En déduire $p(A)$.

d. Montrer que la probabilité de l'événement "la calculatrice ne présente aucun défaut" arrondie au millième est égale à 0,902.

PROBLEME

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (ax + b)e^{cx}$, où a , b et c sont des nombres réels.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculer a , b et c pour que la courbe C passe par le point $A(-\frac{1}{2}; 0)$; par le point $B(0; 1)$ et qu'elle admette en B une tangente ayant un coefficient directeur égal au nombre 1.

2. On supposera désormais que f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$.

a. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote pour C .

b. Etudier les variations de f sur \mathbb{R} .

3. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation $f(x) = 0$ et en déduire le signe de f sur \mathbb{R} .

4. Montrer que, sur l'intervalle $[\frac{1}{2}; 2]$, l'équation $f(x) = 1$ a une solution unique α .

Donner la valeur décimale arrondie à 10^{-1} de α .

5. Ecrire une équation de la tangente \mathcal{J} à C au point B .

6. Tracer \mathcal{J} et C dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

PARTIE B

On donne la fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = (-2x - 3)e^{-x} + 3$.

1. Montrer que F est la primitive sur \mathbb{R} de f qui s'annule pour $x = 0$.

2. Calculer, en cm^2 , la valeur exacte de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équation

$$x = -\frac{1}{2} \text{ et } x = 1.$$

Donner une valeur approchée de cette aire à 10^{-2} près.

BACCALaurÉAT, SÉRIE ES
ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE ET ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ
FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. STATISTIQUE

Moyenne, variance, écart type

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i ; V(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}$$

Dans le cas d'un regroupement en classes :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p n_i x_i ; V(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p n_i x_i^2 - (\bar{x})^2$$

Droites de régression

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i y_i) - \bar{x} \bar{y}$$

$$y = ax + b, \text{ où } a = \frac{\sigma_{xy}}{V(x)}$$

$$x = a'y + b', \text{ où } a' = \frac{\sigma_{xy}}{V(y)}$$

Coefficient de corrélation linéaire

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

II. COMBINATOIRE - DENOMBREMENTS
(SPÉCIALITÉ)

Soit E un ensemble de n éléments

Nombre de sous-ensembles de p éléments de E :

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

où $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$; $0! = 1$

$$C_n^p = C_n^{n-p} ; C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$$

III. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) ; P(\Omega) = 1 ; P(\emptyset) = 0$$

Si A_1, \dots, A_n forment une partition de A , $P(A) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$

Dans le cas équiprobable :

$$P(A) = \frac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$$

Probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) ; P(A|B) \text{ se note aussi } P_B(A)$$

Cas où A et B sont indépendants : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Formule des probabilités totales

Si les événements B_1, B_2, \dots, B_n forment une partition de Ω , alors $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n)$

Variable aléatoire

Fonction de répartition : $F(x) = P(X \leq x)$

Espérance mathématique : $E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$

Variance : $V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - (E(X))^2$

Ecart type $\sigma_x = \sqrt{V(X)}$

Loi binomiale (SPÉCIALITÉ)

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} ; E(X) = np$$

IV. ALGÈBRE

A. IDENTITÉS REMARQUABLES

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 ; (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + b^n$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

B. EQUATION DU SECOND DEGRE

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, aucune solution réelle.

Si $\Delta \geq 0$, $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$.

C. SUITES ARITHMETIQUES SUITES GEOMETRIQUES

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $S_n = 1 + b + b^2 + \dots + b^n = \frac{1-b^{n+1}}{1-b}$

Si $b = 1$, $S_n = n + 1$

V. ANALYSE

A. PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$\ln |x| = 0$

$\ln e = 1$

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,

$y = \exp x \Leftrightarrow e^x$ équivaut à $x = \ln y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$x^{a+b} = x^a x^b$

$x^{a-b} = \frac{x^a}{x^b}$

$a^x = e^{x \ln a}$ ($a > 0$)

$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

$(e^x)^y = e^{xy}$

$\ln a^x = x \ln a$

$(x^a)^b = x^{ab}$

C. DÉRIVÉES ET PRIMITIVES (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	Intervalle de validité
k	0	$]-\infty, +\infty[$
x	1	$]-\infty, +\infty[$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$x^a, a \in \mathbb{R}$	ax^{a-1}	$]0, +\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty, +\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = k u'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u \cdot v)' = (u'v + uv)'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^a)' = au^{a-1} u'$

D. CALCUL INTEGRAL

Formule fondamentale

Si F est une primitive de f , alors $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

Positivité

Si $a \leq b$ et $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.

Formule de Chasles

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

Intégration d'une inégalité

Si $a \leq b$ et $f \leq g$, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$

Si $a \leq b$ et $m \leq f \leq M$,

alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a)$

Linéarité

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt$$

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$: $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$

E. EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Equations	Solutions sur I
$f' = k, f' > 0$ sur un intervalle I	$f(x) = C e^{kx}, C > 0$