

UNIVERSITE MICHEL DE MONTAIGNE BORDEAUX 3

Centre de : BORDEAUX Session : JUIN 2002

D.A.E.U : MATHEMATIQUES – Durée 4 heures

*Les sorties sont autorisées après une heure de composition

*Les calculatrices sont autorisées

EXERCICE 1 :

On considère la fonction $f : x \mapsto 5e^{2x} - 2e^x - 3$ définie sur l'ensemble des réels. On désigne par © sa courbe représentative.

1)

- a) Résolvez l'équation (e_1) : $5X^2 - 2X - 3 = 0$.
- b) Déduisez-en les solutions de l'équation (e_2) : $f(x) = 0$.
- c) Interprétez graphiquement ce résultat.

2)

- a) Déterminez la dérivée de la fonction $f : f'(x)$
- b) Résolvez l'inéquation $f'(x) > 0$ (on pourra mettre e^x en facteur)

3)

- a) Donnez la valeur exacte de $f(\ln(\frac{1}{5}))$ (on pourra utiliser la relation $e^{\ln x} = x$)
- b) Dressez le tableau des variations de la fonction f .

EXERCICE 2 :

On a relevé chaque mois de l'année 2001 le prix de vente d'un article. On obtient le tableau suivant dans lequel x représente le numéro d'ordre du mois et y le prix en Euros de l'article concerné.

Mois	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	125	125	126.7	128	129.5	130.5	131	132.5	134.5	136	136.3	137

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

- 1) Quel est le prix moyen de l'article pour l'année 2001 ?
- 2) Représentez cette série par un nuage de points.
Origine du repère (0 ; 124) Echelles : 1 cm pour 1 mois et 2 cm pour 1 Euro.
- 3) Déterminez le coefficient de corrélation linéaire de cette série et concluez.
- 4) Déterminez une équation de la droite de régression de y en x puis construisez cette droite.
- 5) En supposant que l'évolution des prix se poursuive en 2002 comme en 2001 quel prix peut-on prévoir pour l'article en juin 2002 ?

PROBLEME : Le but de ce problème est de faire l'étude de la fonction f sur l'intervalle I .

$$f : x \mapsto \frac{7x+3}{x^2} + x \quad I =]0;10]$$

On désigne par \odot la courbe représentative de f .

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire sur l'intervalle I.

Soit la fonction

$$g : x \mapsto x^3 - 7x - 6$$

- 1) Calculez $g(1/2)$ et $g(-1)$.
- 2) Expliquez pourquoi $g(x)$ est factorisable par $x+1$.
- 3) Effectuez la division euclidienne de $g(x)$ par $x+1$.
- 4) Factorisez $g(x)$ sous la forme d'un produit de 3 facteurs.
- 5) Résolvez sur I , l'inéquation : $g(x) > 0$.

PARTIE B : Etude de la fonction f sur l'intervalle I.

- 1) Déterminez $f'(x)$ et montrez que :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

- 2) A l'aide du 5) de la partie A et de l'étude du signe de x^3 étudiez le signe de $f'(x)$ sur I .
- 3) En déduire le sens des variations de f sur I , et dressez le tableau des variations.
- 4) On considère la droite (D) d'équation $y=x$.
 - a) Etudiez le signe de $f(x)-x$ sur I .
 - b) Interprétez graphiquement ce résultat.

- 5) a) Complétez le tableau (Résultats au dixième):

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(x)										
f(x)-x										

- b) Interprétez graphiquement la dernière ligne du tableau.
- 6) Tracez dans un même repère \odot et (D) . (Echelles : 2 cm pour 1 unité sur chaque axe)

BAREME : Exercice 1 : 5 points

Exercice 2 : 5 points

Problème : 10 point

FORMULAIRE

1) IDENTITES REMARQUABLES :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

2) EQUATION DU SECOND DEGRE :

$$(E): ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Si $\Delta > 0$ alors (E) admet deux solutions

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si $\Delta = 0$ alors (E) admet une solution

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

Si $\Delta < 0$ alors (E) n'admet pas de solution

Factorisation : Si $\Delta \geq 0$ alors on a :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

3) LOGARITHME : PROPRIETES.

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\ln(a^n) = n \ln a$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln 1 = 0 \quad \ln e = 1$$

4) STATISTIQUES :

Moyenne : $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$

Variance : $V_x = \frac{1}{n} \sum x_i^2 - (\bar{x})^2$

Ecart type : $\sigma_x = \sqrt{V_x}$

Covariance : $\sigma_{x,y} = \frac{1}{n} \sum x_i y_i - \bar{x}\bar{y}$

Coefficient de corrélation : $r = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y}$

Droite de régression : $y = ax + b$

Avec $a = \frac{\sigma_{x,y}}{V_x}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$

5) FONCTIONS DERIVEES :

$f(x)$	$f'(x)$
C (constante)	0
x	1
x^2	2x
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$[U(x)]^n$	$n[U(x)]^{n-1}U'(x)$
$U(x) \times V(x)$	$U'(x)V(x) + U(x)V'(x)$
$\frac{U(x)}{V(x)}$	$\frac{U'(x)V(x) - U(x)V'(x)}{[V(x)]^2}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\ln[U(x)]$	$\frac{U'(x)}{U(x)}$
e^x	e^x
$e^{U(x)}$	$U'(x)e^{U(x)}$