UNIVERSITE MICHEL DE MONTAIGNE BORDEAUX 3

Centre de : **BORDEAUX** Session :**JUIN 2005**

D.A.E.U : MATHEMATIQUES – Durée 4 heures

***Les sorties sont autorisées après une heure de composition**
*Les calculatrices sont autorisées

EXERCICE 1 :

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $I =]0;+\infty[$ par
$f(x) = \dfrac{2\ln x + 1}{2x}$. On note © sa courbe représentative.

1) Résolvez l'inéquation $1 - 2\ln x > 0$.

2) Calculez la fonction dérivée, et montrez qu'elle peut s'écrire sous la forme
$f'(x) = \dfrac{1 - 2\ln x}{2x^2}$.

3) A l'aide des questions 1) et 2), étudiez le signe de $f'(x)$ et dressez le tableau des variations de la fonction f.

4) Déterminez une équation de la tangente (T) à © au point d'abscisse 1.

5) A l'aide du tableau de valeurs donné ci-dessous, tracez © et (T).

(Echelles : 2 cm pour une unité sur chaque axe)

x	0.25	0.5	1	1.6	9
f(x)	-3.5	-0.4	0.5	0.6	0.3

6) La courbe © coupe l'axe des abscisses au point A. Déterminez la valeur exacte de l'abscisse du point A.

EXERCICE 2 :

Deux services (A et B) d'un hôpital se partage l'usage de deux appareils médicaux : un scanner et une radio.

Une étude a montré que les patients du service A passent en moyenne 30 minutes au scanner et 20 minutes à la radio.

Quant aux patients du service B, ils passent en moyenne 15 minutes au scanner et 20 minutes à la radio.

Le service du scanner n'est disponible que 9 heures par jour et celui de la radio 10 heures par jour.

Ces appareils étant coûteux on cherche à déterminer le nombre x de patients du service A et le nombre y de patients du service B pour les utiliser au mieux chaque jour.

1)

a) Déterminez le système d'inéquations traduisant les contraintes.

b) Montrez que ce système équivaut au système suivant : $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 36 \\ x + y \leq 30 \end{cases}$

c) Donnez une résolution graphique du système précédant. (unités graphiques : 0.5 cm par unité sur chaque axe)

2) Pour la gestion des appareils, 6 Euros sont prélevés sur les frais médicaux des patients du service A et 4 Euros pour ceux du service B.

a) Exprimez en fonction de x et de y la somme S ainsi obtenue.

b) Tracez sur le graphique précédent la droite Δ correspondant à une somme S de 200 Euros. A l'aide du graphique, indiquez si une somme S de 200 Euros est réalisable.

c) Expliquez comment le graphique permet de déterminer le nombre x de patients du service A et le nombre y de patients du service B pour lesquels la somme S est maximale.

On notera I le point du graphique représentant ces deux nombres.

Donnez les coordonnées de I et le montant de la somme maximale obtenue.

PROBLEME :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [-3;3]$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2x + 3}$. On désigne par © sa courbe représentative et par (D) la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{2}$.

1) Résolvez sur I l'équation $f(x) = 0$. (on donnera les valeurs exactes, ainsi que les valeurs approchées à 0.01 près)
Interprétez graphiquement ce résultat.

2)

a) Calculez $f'(x)$ et montrez que pour tout x de I $f'(x) = \dfrac{x^2 + 8x + 5}{(x^2 + 2x + 3)^2}$.

b) Résolvez l'équation $x^2 + 8x + 5 = 0$ (on donnera les valeurs exactes, ainsi que les valeurs approchées à 0.01 près)

c) Déterminez le signe de $f'(x)$ sur I.

d) Déduisez-en les variations de f sur I.

e) Dressez le tableau des variations de f sur I.

f) Déterminez une équation de la tangente (T) à © au point d'abscisse 0.

g) Déterminez les coordonnées des points d'intersection de © et (D).

3)

a) Recopiez et complétez le tableau ci-dessous (résultats au centième) :

x	-3	-2	-1.62	-1	-0.68	0	0.62	1	2	3
f(x)					-0.58					

b) Construisez ©, (T) et (D).
(Echelles : 2 cm par unité en abscisse ; 10 cm par unité en ordonnées)

BAREME : EXERCICE 1 : 5 points. EXERCICE 2 : 5 points. PROBLEME : 10 points.

FORMULAIRE

1) IDENTITES REMARQUABLES :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

2) EQUATION DU SECOND DEGRE :

$$(E) : ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Si $\Delta > 0$ alors (E) admet deux solutions

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si $\Delta = 0$ alors (E) admet une solution

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

Si $\Delta < 0$ alors (E) n'admet pas de solution

Factorisation : Si $\Delta \geq 0$ alors on a :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

3) LOGARITHME :PROPRIETES.

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\ln(a^n) = n \ln a$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$\ln 1 = 0 \quad \ln e = 1$

4) STATISTIQUES :

Moyenne : $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$

Variance : $V_x = \frac{1}{n}\sum x_i{}^2 - (\bar{x})^2$

Ecart type: $\sigma_x = \sqrt{V_x}$

Covariance : $\sigma_{x,y} = \frac{1}{n}\sum x_i y_i - \overline{x}\,\overline{y}$

Coefficient de corrélation : $r = \dfrac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y}$

Droite de régression : $y = ax + b$

Avec $a = \dfrac{\sigma_{x,y}}{V_x}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$

5) FONCTIONS DERIVEES :

$f(x)$	$f'(x)$
C (constante)	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
$[U(x)]^n$	$n[U(x)]^{n-1}U'(x)$
$\frac{1}{U(x)}$	$-\frac{U'(x)}{[U(x)]^2}$
$U(x) \times V(x)$	$U'(x)V(x) + U(x)V'(x)$
$\frac{U(x)}{V(x)}$	$\frac{U'(x)V(x) - U(x)V'(x)}{[V(x)]^2}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\ln[U(x)]$	$\frac{U'(x)}{U(x)}$
e^x	e^x
$e^{U(x)}$	$U'(x)e^{U(x)}$