UNIVERSITE MICHEL DE MONTAIGNE BORDEAUX 3

Centre de : **BORDEAUX** Session : **JUIN 2004**

D.A.E.U : MATHEMATIQUES – Durée 4 heures

***Les sorties sont autorisées après une heure de composition**
*Les calculatrices sont autorisées

EXERCICE 1 :

On considère la fonction $f : x \mapsto 4e^{2x} - 9e^{x} + 2$ définie sur l'ensemble des réels. On désigne par © sa courbe représentative.

1)
a) Résolvez l'équation (e$_1$) : $4X^2 - 9X + 2 = 0$..
b) Déduisez-en les solutions de l'équation (e$_2$) : $f(x) = 0$.
c) Interprétez graphiquement ce résultat.

2)
a) Déterminez la dérivée de la fonction f : $f'(x)$
b) Résolvez l'inéquation $f'(x) > 0$ (on pourra mettre e^x en facteur)

3)
a) Donnez la valeur exacte de $f(\ln(\frac{9}{8}))$ (on pourra utiliser la relation $e^{\ln x}=x$)
b) Dressez le tableau des variations de la fonction f.

EXERCICE 2 :

Le conseil municipal d'une commune décide d'améliorer son jeu d'effets lumineux en vue des fêtes de fin d'année 2003.

Il lui faudra au moins 800 m de guirlandes lumineuses pour la rue principale, au moins 12 « étoiles de neiges » pour les carrefours stratégiques et au moins 8 « sapins de Noël » pour les artères commerçantes.

L'entreprise « Fiesta » propose le lot A constitué de 100 m de guirlandes, 2 « étoiles de neiges », 2 « sapins de Noël » au prix de 700 Euros.

L'entreprise « Réveillon » propose le lot B constitué de 200 m de guirlandes, 2 « étoiles de neiges », 1 « sapin de Noël » au prix de 980 Euros.

On se propose de déterminer le nombre x de lots A et le nombre y de lots B à acheter pour que la dépense soit minimale.

1) a) Déterminez le système d'inéquations traduisant les contraintes.

b) Montrez que ce système équivaut au système suivant : $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \geq 8 \\ x + y \geq 6 \\ 2x + y \geq 8 \end{cases}$

c) Donnez une résolution graphique du système précédant. (unités graphiques : 2 cm par unité sur chaque axe)
(on notera par D$_1$,D$_2$,D$_3$ les droites d'équations respectives : $D_1 : x + 2y = 8$; $D_2 : x + y = 6$; $D_3 : 2x + y = 8$)

d) A l'aide du graphique déterminez si les commandes suivantes satisfont les contraintes :
   a. Commande C_1 : 7 lots A et 1 lot B.
   b. Commande C_2 : 3 lots A et 2 lots B.
   c. Commande C_3 : 6 lots A et 1 lot B.

e) Déterminez par le calcul les coordonnées du point d'intersection des droites D_1 et D_2.

f) a) Exprimez en fonction de x et de y la dépense D occasionnée par l'achat de x lots A et de y lots B.

b) Montrez que la commande C_1 occasionne une dépense de 5880 Euros.

c) Tracez sur le graphique précédent la droite Δ correspondant à une dépense de 5880 Euros.
A l'aide du graphique, indiquez si une dépense de 5880 Euros est suffisante pour couvrir les besoins de la commune. Est-elle minimale ?

d) Expliquez comment le graphique permet de déterminer la commande à passer aux deux entreprises pour que la dépense soit minimale.
On notera I le point du graphique représentant le nombre de lots de chaque catégorie à commander pour que la dépense soit minimale.
Donnez les coordonnées de I et le montant de cette dépense minimale.

PROBLEME On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [-2;2]$ par :

$f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$

On désigne par © la courbe représentative de f.

1) On désire déterminer la valeur exacte de $f(\frac{1+\sqrt{7}}{3})$.

   a) Développez l'expression $(\frac{1+\sqrt{7}}{3})^2$. (résultat sous la forme $\frac{a+b\sqrt{7}}{c}$).

   b) En écrivant que $(\frac{1+\sqrt{7}}{3})^3 = (\frac{1+\sqrt{7}}{3})^2 \times (\frac{1+\sqrt{7}}{3})$ développez $(\frac{1+\sqrt{7}}{3})^3$. (résultat sous la même forme qu'au a)).

   c) Calculez la valeur exacte de $f(\frac{1+\sqrt{7}}{3})$.

2) On désire factoriser $f(x)$.

   a) Déterminez une racine de $f(x)$.

   b) En effectuant une division euclidienne factorisez $f(x)$ sous la forme de produit de deux facteurs.

   c) Factorisez $f(x)$ sous la forme de produit de trois facteurs du premier degré.

3) Etude du signe de $f(x)$.

   a) Résolvez l'inéquation $f(x) \geq 0$.

   b) Interprétez graphiquement ce dernier résultat.

UNIVERSITE MICHEL DE MONTAIGNE BORDEAUX 3

Centre de : **BORDEAUX**

D.A.E.U : MATHEMATIQUES

FORMULAIRE

1) IDENTITES REMARQUABLES :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

2) EQUATION DU SECOND DEGRE :

$$(E): ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Si $\Delta > 0$ alors (E) admet deux solutions

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si $\Delta = 0$ alors (E) admet une solution

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

Si $\Delta < 0$ alors (E) n'admet pas de solution

Factorisation : Si $\Delta \geq 0$ alors on a :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

3) LOGARITHME :PROPRIETES.

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\ln(a^n) = n \ln a$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln 1 = 0 \qquad \ln e = 1$$

4) STATISTIQUES :

Moyenne : $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$

Variance : $V_x = \frac{1}{n}\sum x_i^2 - (\bar{x})^2$

Ecart type: $\sigma_x = \sqrt{V_x}$

Covariance : $\sigma_{x,y} = \frac{1}{n}\sum x_i y_i - \bar{x}\bar{y}$

Coefficient de corrélation : $r = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y}$

Droite de régression : $y = ax + b$

Avec $a = \frac{\sigma_{x,y}}{V_x}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$

5) FONCTIONS DERIVEES :

$f(x)$	$f'(x)$
C (constante)	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
$[U(x)]^n$	$n[U(x)]^{n-1}U'(x)$
$U(x) \times V(x)$	$U'(x)V(x) + U(x)V'(x)$
$\frac{U(x)}{V(x)}$	$\frac{U'(x)V(x) - U(x)V'(x)}{[V(x)]^2}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\ln[U(x)]$	$\frac{U'(x)}{U(x)}$
e^x	e^x
$e^{U(x)}$	$U'(x)e^{U(x)}$

4) Etude des variations de la fonction f.

a) Calculez la dérivée f' de la fonction f.

b) Montrez que $f'(x)$ peut s'écrire : $f'(x) = 3(x - \frac{1-\sqrt{7}}{3})(x - \frac{1+\sqrt{7}}{3})$.

c) A l'aide d'un tableau de signes, étudiez le signe de $f'(x)$.

d) Dressez le tableau des variations de la fonction f.

5) Complétez le tableau de valeurs suivant :

x	-2	$-\sqrt{2}$	$\frac{1-\sqrt{7}}{3}$	0	1	$\frac{1+\sqrt{7}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
$f(x)$			2.63			-0.11		

6) Déterminez une équation de la tangente (T) à © au point d'abscisse 0.

7) Tracez © et (T). (Unités graphiques : en abscisses 4 cm par unité ; en ordonnées 2 cm par unité)

Barème :

Exercice 1 : 5 points

Exercice 2 : 6 points

Problème : 9 points