

BACCALAUREAT TECHNOLOGIQUE**Session 2007**

<p style="text-align: center;">Épreuve : MATHÉMATIQUES</p>
--

Série**SCIENCES ET TECHNOLOGIE DE LABORATOIRE****CHIMIE DE LABORATOIRE ET
DE PROCÉDÉS INDUSTRIELS**

Durée de l'épreuve : 3 heures

coefficient : 4

*L'usage de la calculatrice est autorisé.**Une feuille de papier millimétré, réservée au problème, sera distribuée au candidat.**Un formulaire de mathématiques sera distribué au candidat.**Le sujet comporte 4 pages, dont l'annexe, page 4 est à rendre avec la copie.*

Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (4 points)

1 - Résoudre l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' - 2y = 0.$$

2 - On note f la solution sur \mathbf{R} de l'équation différentielle (E), vérifiant $f(0) = 1$ et g la solution sur \mathbf{R} de l'équation différentielle (E), vérifiant $g(0) = 2$.

a) Vérifier que, pour tout nombre réel x , $f(x) = e^{2x}$.

b) Exprimer $g(x)$ en fonction de x .

3 - Sur l'annexe, à rendre avec la copie, page 4, figurent les courbes représentatives \mathcal{C} et \mathcal{C}' des fonctions f et g dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit Δ la droite d'équation $y = 2$.

Cette droite coupe respectivement les courbes \mathcal{C} et \mathcal{C}' aux points A et B .

a) Tracer la droite Δ et placer les points A et B .

b) Déterminer le coefficient directeur de la droite \mathcal{T} tangente en A à la courbe \mathcal{C} et celui de la droite \mathcal{T}' tangente en B à la courbe \mathcal{C}' .

c) Quelle remarque peut-on faire sur les deux tangentes \mathcal{T} et \mathcal{T}' ?

EXERCICE 2 (6 points)

Une urne contient quatre boules, indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 4.

Une expérience aléatoire se déroule de la manière suivante :

On tire au hasard une première boule de l'urne et on note son numéro. Après avoir remis cette boule dans l'urne, on en tire au hasard une seconde dont on note aussi le numéro.

À l'issue de cette expérience, on obtient un couple de nombres (on rappelle que, par exemple, le couple (2, 3) est différent du couple (3, 2)).

1 - À l'aide d'un arbre ou d'un tableau, établir la liste des 16 couples possibles.

2 - Dans cette question, on donnera les probabilités sous la forme de fractions de dénominateur 16.

a) On note A l'événement « obtenir un couple de nombres pairs ».

Montrer que la probabilité de l'événement A est $\frac{4}{16}$.

b) On note B l'événement « obtenir un couple de nombres impairs ».

Calculer la probabilité de l'événement B .

c) On note C l'événement « obtenir un couple de nombres de parité différente ».

Calculer la probabilité de l'événement C .

- 3 - On organise un jeu.
Un joueur mise 2 € et réalise ensuite l'expérience aléatoire décrite ci-dessus.
- Si l'événement A est réalisé, le joueur reçoit 8 € de l'organisateur du jeu ;
 - Si l'événement B est réalisé, le joueur reçoit 4 € de l'organisateur du jeu ;
 - Si l'événement C est réalisé, le joueur donne 4 € à l'organisateur du jeu.

On désigne par X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur.
Par exemple, s'il obtient le couple $(2, 2)$, son gain est 6 €.

- a) Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X .
- b) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
- c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X .
- d) On dit qu'un jeu est équitable lorsque l'espérance de gain est nulle.
Quelle aurait dû être la mise du joueur pour que le jeu soit équitable ?

PROBLÈME (10 points)

Partie I : Étude de la fonction f .

On considère la fonction f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = (2x^2 - 5x + 2) e^x$.

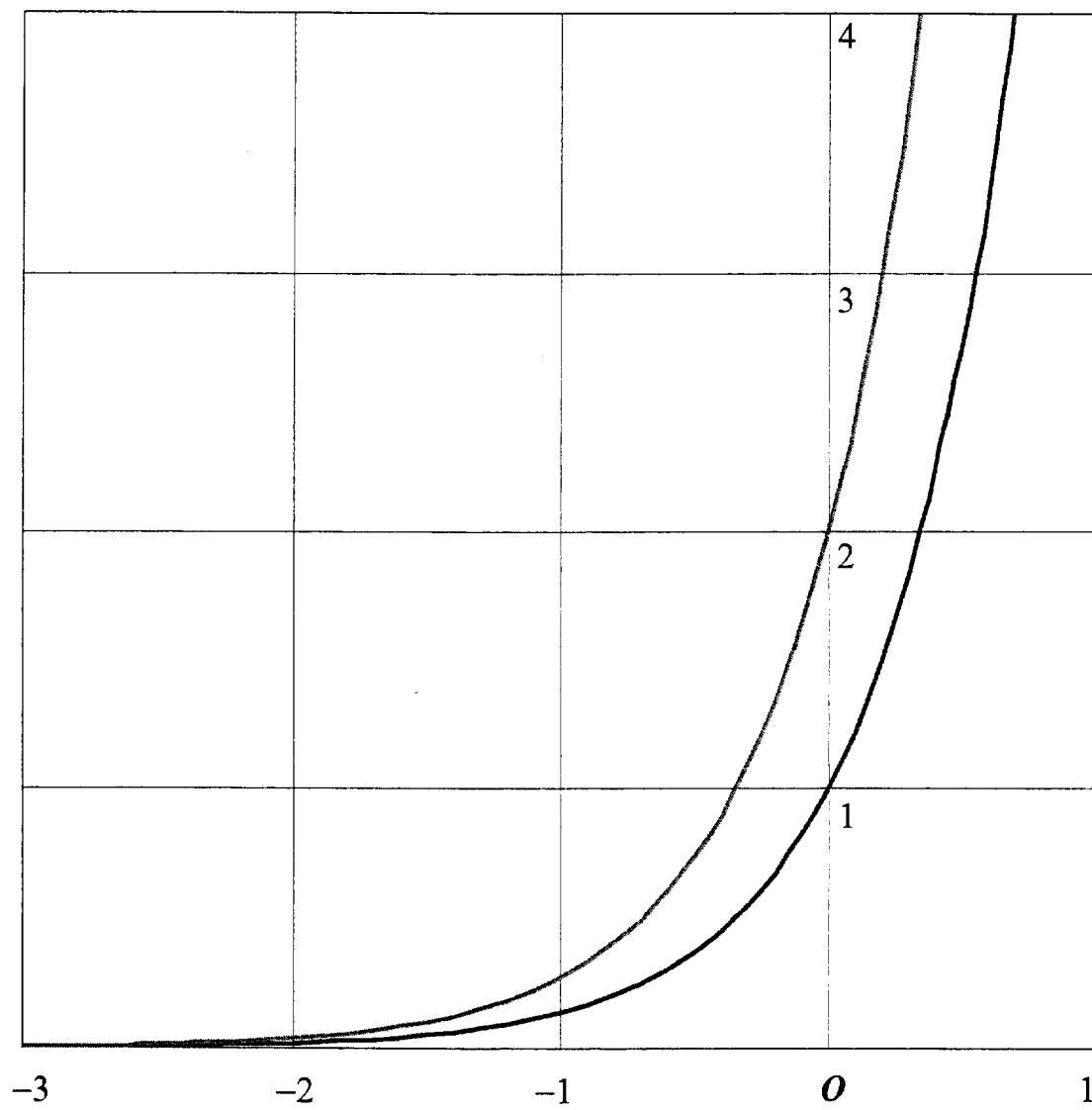
On note \mathcal{C} la courbe représentative la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

- 1 -
 - a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
 - b) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$ (on donne $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$).
En déduire l'existence d'une asymptote dont on précisera l'équation.
- 2 - On note f' la fonction dérivée de la fonction f .
 - a) Montrer que, pour tout nombre réel x , $f'(x) = (2x^2 - x - 3) e^x$.
 - b) Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .
 - c) Donner le tableau des variations de la fonction f (préciser la valeur exacte de chaque extremum).
- 3 -
 - a) Montrer que l'équation $f(x) = 2$ possède une unique solution α dans l'intervalle $[2; 3]$.
 - b) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} du nombre α .
- 4 - Tracer la courbe \mathcal{C} et placer son point A d'abscisse α .

Partie II : Calcul d'une intégrale.

- 1 - On désigne par F la fonction définie sur \mathbf{R} par $F(x) = (2x^2 - 9x + 11) e^x$.
Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur \mathbf{R} .
- 2 - Calculer l'intégrale $I = \int_{0,5}^2 f(x) dx$.
- 3 - Donner une interprétation graphique de cette intégrale.

ANNEXE à rendre avec la copie



FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$; $P(\Omega) = 1$; $P(\emptyset) = 0$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \frac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

Variable aléatoire

Fonction de répartition : $F(x) = P(X \leq x)$

Espérance mathématique : $E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$

Variance : $V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - (E(X))^2$

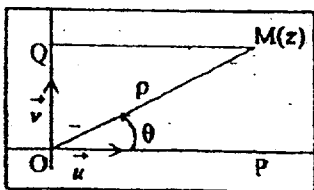
Écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

II. ALGÈBRE

A. NOMBRES COMPLEXES

Forme algébrique : $z = x + iy$

Forme trigonométrique : $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$



$$\vec{OM} = x \vec{u} + y \vec{v}$$

$$\overline{OP} = x = \Re(z) = \rho \cos \theta$$

$$\overline{OQ} = y = \Im(z) = \rho \sin \theta$$

$$OM = \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Opérations algébriques

$$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$$

$$zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

Conjugué

$$z = x + iy = \rho e^{i\theta} ; \bar{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$$

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) ; y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' ; \overline{zz'} = \bar{z} \bar{z}'$$

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}$$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$$zz' = (\rho e^{i\theta})(\rho' e^{i\theta'}) = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$$

$$|zz'| = |z||z'|$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta-\theta')}$$

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}$$

Inégalité triangulaire

$$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

B. IDENTITÉS REMARQUABLES

(valables sur \mathbb{C} et donc sur \mathbb{R})

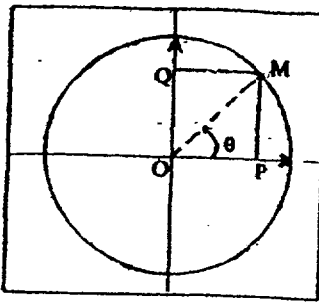
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 ; (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) ; a^2 + b^2 = (a+ib)(a-ib)$$

C. TRIGONOMETRIE



$$\overline{OP} = \cos \theta$$

$$\overline{OQ} = \sin \theta$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}; \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formules d'Euler

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) ; \sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

Formules d'addition

$$e^{i(a+b)} = e^{ia} e^{ib}$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a); \sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$$

Formules de Moivre

$$\text{Pour tout entier naturel non nul } n, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

$$\text{soit encore } (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

D. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double

$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas : $ax^2 + bx + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}; z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

E. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

$$\text{Si } b \neq 1, S_n = 1 + b + b^2 + \dots + b^n = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$$

$$\text{Si } b = 1, S_n = n + 1$$

III. ANALYSE

A. PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\text{Si } x \in]-\infty, +\infty[\text{ et } y \in]0, +\infty[.$$

$$y = \exp x = e^x \text{ équivaut à } x = \ln y$$

$$e^0 = 1$$

$$e^{a+b} = e^a e^b$$

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$a^x = e^{x \ln a} \quad (a > 0)$$

$$(e^a)^b = e^{ab}$$

$$\ln a^x = x \ln a$$

2. Fonctions puissances

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad (x > 0)$$

$$x^0 = 1$$

$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$$

$$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$$

$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

$$\text{Si } n \in \mathbb{N}^*, x \in]0, +\infty[\text{ et } y \in]0, +\infty[.$$

$$y = \sqrt[n]{x} \text{ équivaut à } x = y^n$$

B. LIMITES USUELLES DE FONCTIONS ET DE SUITES

1. Fonctions

Comportement à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty;$$

$$\text{si } \alpha < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$$

Comportement à l'origine

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0;$$

$$\text{si } \alpha < 0, \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = +\infty$$

Croissances comparées à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

Comportement à l'origine de $\ln(1+x)$, e^x , $\sin x$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

2. Suites (SÉRIES STL, spécialités génie électronique et génie électrotechnique, STL, spécialité physique de laboratoire et de procédés industriels)

$$\text{Si } k > 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = +\infty; \text{ si } 0 < k < 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = 0$$

C. DÉRIVÉES ET PRIMITIVES (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	Intervalle de validité
k	0	$]-\infty, +\infty[$
x	1	$]-\infty, +\infty[$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty, +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty, +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty, +\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \quad u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

D. CALCUL INTÉGRAL

Si F est une primitive de f , alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Formule de Chasles

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$$

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$$

Linéarité

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$$

Positivité

Si $a \leq b$ et $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a \leq b$ et $f \leq g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$

Si $a \leq b$ et $m \leq f \leq M$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$: $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$

E. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Equations	Solutions sur $]-\infty, +\infty[$
$y' - ay = 0$	$f(x) = ke^{ax}$
$y'' + \omega^2 y = 0$	$f(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$